ISSN: 1859-2171
e-ISSN: 2615-9562 TNU Journal of Science and Technology 204(11): 131 - 136

# ƯỚC LƯỢNG XÁC SUẤT THIỆT HẠI TRONG MÔ HÌNH BẢO HIỂM TỔNG QUÁT ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VỚI DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC

**Phùng Duy Quang[1*], Nguyễn Ngọc Hải[2]**
*[1]Trường Đại học Ngoại thương, [2]Trường Đại học Công đoàn*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng mô hình của Maikol A. Diasparra và Rosaria Romera (2009) với dãy tiền chi trả bảo hiểm là phụ thuộc Markov và dãy tiền lãi là phụ thuộc hồi quy cấp 1. Từ đó, chúng tôi đưa ra các ước lượng xác suất thiệt hại cho mô hình đó. Phương pháp đệ quy được sử dụng để thiết lập bất đẳng thức Lundberg tổng quát cho các xác suất thiệt hại. Kết quả đáng chú ý trong công trình hiện tại là định lý: Xây dựng các ước lượng chặn trên cho xác suất thiệt hại của mô hình dưới dạng hàm mũ bằng phương pháp đệ quy.

**Từ khóa:** *xác suất thiệt hại; xích Markov thuần nhất, quá trình rủi ro điều khiển được, phương pháp đệ quy, phụ thuộc Markov, phụ thuộc hồi quy*

***Ngày nhận bài: 06/5/2019; Ngày hoàn thiện: 13/8/2019; Ngày đăng: 19/8/2019***

# RUIN PROBABILITY IN A CONTROLLED RISK PROCESS UNDER RATES OF INTEREST WITH DEPENDENT RANDOM VARIABLES

**Phung Duy Quang[1*], Nguyen Ngoc Hai[2]**
*[1]Foreign Trade University, [2]Trade Union University*

ABSTRACT

In this paper, we extend the model reviewed by Maikol A. Diasparra and Rosaria Romera (2009) to produce ruin probability estimates for the general insurance model with the effect of interest rate with Markov's range of insurance payouts is dependent and the range of interest is dependent on fisrt order regression with the range of insurance payments and the range of interest is a series of random variables that receive values in positive numbers. The main purpose of the paper is that we use recursive methods to establish general Lundberg inequalities for ruin probabilities. Since then, this paper obtained the main result is Theorem 2, constructing the upper bound estimates for the ruin probability of the model in exponential form by recursive method.

**Key words:** *ruin probability, homogenous Markov chain, autoregressive process, recursive technique*

***Received: 06/5/2019; Revised: 13/8/2019; Published: 19/8/2019***

* Corresponding author. *Email: quangpd@ftu.edu.vn*

## 1. Giới thiệu

Gần đây, bài toán thiệt hại trong các mô hình bảo hiểm đã thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu [1], [2], [3]. Trong mô hình bảo hiểm cổ điển, quá trình yêu cầu bồi thường được giả định là một quá trình Poisson và số tiền bồi thường cá nhân được mô tả là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối.Teugels và Sundt [2] nghiên cứu xác suất thiệt hại theo mô hình bảo hiểm Poisson phức hợp với lãi suất hằng số. Yang [4] đã xây dựng được các ước lượng chặn trên dạng mũ và không dạng mũ cho các xác suất thiệt hại của mô hình bảo hiểm với lãi suất hằng và các dãy tiền thu và dãy tiền chi trả bảo hiểm là độc lập. Cai ([5], [6]) đã ước lượng được các xác suất thiệt hại trong các mô hình bảo hiểm với dãy tiền thu và chi bảo hiểm là các dãy biến ngẫu nhiên độc lập, còn lãi suất là quá trình tự hồi quy cấp 1. Cai và Dickson [7] đã xây dựng các bất đẳng thức Lundberg của xác suất thiệt hại trong các mô hình bảo hiểm thời gian rời rạc với lãi suất là phụ thuộc Markov và dãy tiền thu và chi bảo hiểm là dãy biến ngẫu nhiên độc lập. Xu và Wang [9] đưa ra các ước lượng chặn trên cho xác suất thiệt hại trong mô hình bảo hiểm có tác động của lãi suất với dãy tiền thu và chi bảo hiểm là các quá trình tự hồi quy cấp 1, còn lãi suất là dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc Markov. Phùng Duy Quang [14], [15], [16], [17], [18] đã đưa ra các ước lượng chặn trên cho xác suất thiệt hại trong mô hình bảo hiểm có tác động của lãi suất với dãy tiền biến ngẫu nhiên phụ thuộc Markov bằng phương pháp đệ quy hoặc bằng phương pháp Martingale.

Ngoài ra, nhiều kết quả đã nghiên cứu một mô hình bảo hiểm, nơi mà quá trình rủi ro có thể được kiểm soát bằng tái bảo hiểm tỷ lệ. Tiêu chí thực hiện là lựa chọn các chiến lược kiểm soát tái bảo hiểm để ràng buộc xác suất phá hoại của một quá trình rời rạc với lãi suất phụ thuộc Markov. Kiểm soát quá trình rủi ro là một lĩnh vực hoạt động rất rộng, đặc biệt là trong thập kỷ qua; xem [8], [11], [12]. Tuy nhiên, việc có được các giải pháp tối ưu rõ ràng là một nhiệm vụ khó khăn trong một bối cảnh chung. Maikol A. Diasparra và Rosaria Romera [9] đã thu được các ước lượng Lundberg đối với xác suất thiệt hại trong một quá trình rủi ro thời gian rời rạc điều khiển được với dãy lãi suất phụ thuộc Markov, các dãy biến ngẫu nhiên là độc lập. Trong công trình [19], Phùng Duy Quang đã mở rộng kết quả cho dãy phụ thuộc Markov sử dụng phương pháp ước lượng Martingale. Trong công trình này, chúng tôi mở rộng mô hình được xem xét bởi Maikol A. Diasparra và Rosaria Romera [9] để đưa ra các ước lượng xác suất thiệt hại cho mô hình bảo hiểm tổng quát có tác động của lãi suất có điều khiển được với dãy tiền chi trả bảo hiểm là phụ thuộc Markov và dãy lãi suất là phụ thuộc hồi quy cấp 1 với phương pháp ước lượng được sử dụng trong bài báo này là phương pháp đệ quy chứ không phải là phương pháp Martingale.

## 2. Mô hình và các giả thiết

Gọi $Y_n$ là số tiền chi trả thứ n, $Z_n$ là biến ngẫu nhiên chỉ khoảng cách giữa hai thời điểm chi trả thứ n và n -1, $I_n$ là lãi suất thứ n. Chúng ta giả thiết $Y_n$, $Z_n$, $I_n$ là các biến ngẫu nhiên xác định trên không gian xác suất $(\Omega, A, P)$. Khi đó, chúng ta xét quá trình rủi ro tái bảo hiểm với thời gian rời rạc $\{U_n\}_{n\geq 0}$ với vốn ban đầu u được xác định như sau:

$$U_n = U_{n-1}(1+I_n) + C(b_{n-1}).Z_n - h(b_{n-1}, Y_n),\ n \geq 1, (1).$$

Ý nghĩa của các biến và hàm được mô tả trong 8 giả thiết sau:

**Giả thiết 1.** $U_o = u \geq 0$.

**Giả thiết 2.** $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ là xích Markov thuần nhất, sao cho $Y_n$ nhận giá trị trên tập số không âm $G_Y = \{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$ với $Y_o = y_i$ và

$$p_{ij} = P\left[\omega\in\Omega : Y_{n+1}(\omega) = y_j \middle| Y_n(\omega) = y_i\right](n\in N, y_i \in G_Y, y_j \in G_Y),$$

Ở đây, $0 \leq p_{ij} \leq 1, \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1.$

**Giả thiết 3.** $\{I_n\}_{n\geq 0}$ là dãy biến ngẫu nhiên không âm, tuân theo mô hình tự hồi quy cấp 1:

$I_n = \rho I_{n-1} + W_n,\ 0 < \rho < 1, I_o = i_o \geq 0,\ \{W_n\}_{n\geq 0}$ là dãy biến ngẫu nhiên không âm, độc lập và cùng phân phối với hàm phân phối:

$$G(t) = P(\omega \in \Omega; W_o(\omega) \leq t).$$

**Giả thiết 4.** $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ là dãy biến ngẫu nhiên liên tục độc lập và cùng phân phối với hàm phân phối xác suất:

$$F(z) = P(\omega \in \Omega; Z_o(\omega) \leq z).$$

**Giả thiết 5.** Chúng ta ký hiệu $C(b)$ là tác động bên trái của thu bảo hiểm đối với công ty bảo hiểm nếu mức duy trì b được chọn:

$$0 < C(b) \leq c, b \in B.$$

Quá trình có thể điều khiển được bằng tái bảo hiểm, ứng với việc chọn mức $b \in B$ ở đây $B := [b_{min}, 1],\ b_{min} \in (0,1]$ . Tỷ suất thu bảo hiểm $c$ là cố định

**Giả thiết 6.** Chúng ta ký hiệu hàm $h(b,y)$ nhận giá trị trong khoảng $[0,y]$ quy định cụ thể phần yêu cầy bồi thường y do công ty bảo hiểm chi trả và nó cũng phụ thuộc vào mức duy trì b vào đầu kỳ. Do đó y - h(b, y) là phần do bên tái bảo hiểm chi trả. Mức duy trì b = 1 thay cho việc không có tái bảo hiểm. Trong bài báo này chúng ta xét trường hợp tái bảo hiểm theo tỷ lệ, với hàm h xác định bởi:

$$h(b,y) = b.y, \text{ với } b \in B. \qquad (2)$$

Thông thường, hằng số $b_{\min}$ trong giả thiết 5 được chọn bởi:

$$b_{\min} := \min\{b \in (0,1]; C(b) > 0\}.$$

**Giả thiết 7.** Chúng ta giả thiết các dãy $\{Y_n\}_{n\geq 0}, \{W_n\}_{n\geq 0}$ và $\{I_n\}_{n\geq 0}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập.

**Giả thiết 8.** Chúng ta xem xét một quá trình điều khiển Markov $\pi = \{a_n\}_{n\geq 1}$,mà tại mỗi thời điểm n chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại: $a_n(U_n) := b_n$ với $n \geq 0$. Về mặt hình thức có thể ký hiệu: $a: X \to B,$ với $X = \mathbb{R} \cup \ell, B$ là không gian quyết định.

Xét trạng thái ban đầu tùy ý: $U_o = u \geq 0$ và một quá trình điều khiển $\pi = \{a_n\}_{n\geq 1}$. Khi đó, với mỗi $n \geq 1, U_n$ được xác định như sau:

$$U_n = u\prod_{l=1}^{n}(1+I_l) + \sum_{l=1}^{n}\left(C(b_{n-1})Z_l - b_{l-1}.Y_l \prod_{m=l+1}^{n}(1+I_m)\right), (3)$$

Xác suất thiệt hại khi dùng quá trình điều khiển $\pi$ , với vốn ban đầu $u$, và số tiền chi trả ban đầu $Y_o = y_i$, giá trị lãi suất ban đầu $I_o = i_r$ thỏa mãn các giả thiết 1 đến 8 được xác định như sau:

$$\psi^{\pi}(u, y_i, i_o) = P^{\pi}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(U_k < 0) \middle| U_o = u, Y_o = y_i, I_o = i_o\right), (4)$$

Hay có thể viết:

$$\psi^{\pi}(u, y_i, i_o) = P^{\pi}\left(U_k < 0,\ k \geq 1 \middle| U_o = u, Y_o = y_i, I_o = i_o\right), (5)$$

Tương tự, xác suất thiệt hại với thời gian hữu hạn khi dùng quá trình điều khiển $\pi$ , với vốn ban đầu $u$, và số tiền chi trả ban đầu $Y_o = y_i$, giá trị lãi suất ban đầu $I_o = i_o$ thỏa mãn các giả thiết 1 đến 8 được xác định như sau:

$$\psi_n^{\pi}(u, y_i, i_o) = P^{\pi}\left(\bigcup_{k=1}^{n}(U_k < 0) \middle| U_o = u, Y_o = y_i, I_o = i_o\right), (6)$$

Từ (5) và (6), dễ dàng thu được:

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^{\pi}(u, y_i, i_o) = \psi^{\pi}(u, y_i, i_o).$$

Ký hiệu $\Pi$ là không gian các quá trình điều khiển. Một quá trình điều khiển $\pi^*$ được gọi là tối ưu nếu với mỗi cặp giá trị ban đầu ($Y_o$, $I_o$) = ($y_i$, $i_r$), chúng ta có:

$$\psi^{\pi^*}(u, y_i, i_o) \leq \psi^{\pi}(u, y_i, i_o)$$

với mọi $\pi \in \Pi$.

### 3. Kết quả và thảo luận

Mục đích của công trình là sử dụng phương pháp đệ quy để xây dựng ước lượng chặn trên cho xác suất thiệt hại của mô hình (1). Để mở rộng kết quả của Maikol A. Diasparra và Rosaria Romera [9], tác giả bài báo đề xuất các giả thiết từ 1 đến 8 và xây dựng được kết quả nghiên cứu là định lý 2. Để chứng minh được định lý 2, trước hết chúng ta chứng minh định lý 1 sau đây:

**Định lý 1.** Cho mô hình (1) với các giả thiết từ 1 đến 8, với mỗi n = 1, 2, 3, ... ta có

$$\psi_{n+1}^{\pi}(u,y_i,i_o)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{\frac{b_oy_j-u(1+\rho i_o+t)}{C(b_o)}}dF(z)+\int_{\frac{b_oy_j-u(1+\rho i_o+t)}{C(b_o)}}^{+\infty}\psi_n^{\pi}(u(1+\rho i_o+t)-b_oy_j+C(b_o)z,y_j,\rho i_o+t)dF(z)\right\}dG(t)\ (7)$$

và

$$\psi_{1}^{\pi}(u,y_i,i_o)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{\frac{b_oy_j-u(1+\rho i_o+t)}{C(b_o)}}dF(z)+\int_{\frac{b_oy_j-u(1+\rho i_o+t)}{C(b_o)}}^{+\infty}\psi^{\pi}(u(1+\rho i_o+t)-b_oy_j+C(b_o)z,y_j,\rho i_o+t)dF(z)\right\}dG(t)\ (8)$$

Với quy ước:

i) Nếu $v\le 0$ thì $F(v)=0$,

ii) Nếu $v\le 0$ thì $\int_v^{+\infty}dF(z)=\int_0^{+\infty}dF(z)$,

iii) Nếu $v\le 0$ thì $\int_0^{v}\psi^{\pi}(h(z),y_i,i_o)dF(z)=0.$

**Chứng minh**

Sử dụng định nghĩa (4), (6) và tính chất của xác suất cổ điển, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Để thiết lập được kết quả ước lượng chặn trên xác suất thiệt hại cho mô hình (1), ta sử dụng bổ đề sau:

**Bổ đề.** Cho mô hình (1) với các giả thiết từ 1 đến 8,

$$E^{\pi}\left[(b_oY_1-C(b_o)Z_1)\middle|Y_o=y_i\right]<0,$$

và

$$P^{\pi}\left[b_oY_1-C(b_o)Z_1>0\middle|Y_o=y_i\right]>0, \qquad (9)$$

Với mỗi $y_i\in G_Y$ thì tồn tại một số dương $R_i$ thỏa mãn:

$$E^{\pi}\left[e^{-R_i\left[C(b_o)Z_1-b_oY_1\right]}\middle|Y_o=y_i\right]=1\,(10).$$

**Chứng minh**

Xét hàm số

$$f_i(t)=E^{\pi}\left[e^{-t\left[C(b_o)Z_1-b_oY_1\right]}\middle|Y_1=y_i\right]-1,\ t\in(0;+\infty).$$

Từ các tính chất của hàm $f_i(t)$: Hàm $f_i(t)$ là hàm lồi và

$f_i(0)=0; f_i'(0)<0; \lim_{t\to+\infty}f_i(t)=+\infty$ suy ra điều phải chứng minh.

Sử dụng kết quả của Định lý 1 và bổ đề, chúng ta chứng minh kết quả chính của bài báo là định lý 2 dưới đây.

**Định lý 2.**

Với giả thiết đã cho ở Định lý 1 và Bổ đề 1 và $R_o>0$. Với mỗi $y_i\in G_Y=\{y_1,y_2,...,y_n,...\}$ và $u>0$ thì

$$\psi^{\pi}(u,y_i,i_o)\le\beta E^{\pi}\left[e^{-R_ou(1+I_1)}\middle|I_o=i_o\right].\ (11)$$

Trong đó

$$\beta^{-1}=\inf_{t>0}\frac{e^{R_oC(b_o)t}\int_0^t e^{-R_oC(b_o)z}dF(z)}{F(t)},\ 0\le\beta\le1.(12)$$

***Chứng minh***

Ta xét 2 trường hợp:

**Trường hợp 1.**

$$\inf_{t>0}\frac{e^{R_oC(b_o)t}\int_0^t e^{-R_oC(b_o)z}dF(z)}{F(t)}<+\infty.$$

Từ (12) suy ra $0<\beta\le1$ và với mọi v > 0 thì

$$F(v)\le\beta.e^{R_oC(b_o)v}.E^{\pi}\left(e^{-R_oC(b_o)Z_1}\right).(13)$$

Đặt

$$K_1=\left\{j\in\{1,2,...\}:\frac{b_oy_j-u(1+\rho i_o+t)}{C(b_o)}\le0\right\},$$

$$K_2=\left\{j\in\{1,2,...\}:\frac{b_oy_j-u(1+\rho i_o+t)}{C(b_o)}>0\right\}.$$

Từ công thức (8) ta có:

$\psi_1^{\pi}(u,y_i,i_o)$

$$= \sum_{j\in K_1} p_{ij}\left(\int_0^{+\infty} F\left(\frac{b_o y_j - u(1+\rho i_o + t)}{C(b_o)}\right)\right)dG(t)$$

$$+ \sum_{j\in K_2} p_{ij}\left(\int_0^{+\infty} F\left(\frac{b_o y_j - u(1+\rho i_o + t)}{C(b_o)}\right)\right)dG(t)$$

Sử dụng công thức (13) ta có

$$\sum_{j\in K_2} p_{ij}\left(\int_0^{+\infty} F\left(\frac{b_o y_j - u(1+\rho i_o + t)}{C(b_o)}\right)\right)dG(t)$$

$$\le \beta \sum_{j\in K_2} p_{ij}\left(\int_0^{+\infty} e^{R_o\left[C(b_o)y_j - u(1+\rho i_o + t)\right]}.E^{\pi}\left(e^{-R_o C(b_o) Z_1}\right)\right)dG(t).(14)$$

Đồng thời $F\left(\frac{b_o y_j - u(1+\rho i_o + t)}{C(b_o)}\right) = 0$ khi $j \in K_1$ nên suy ra

$$\sum_{j\in K_1} p_{ij}\left(\int_0^{+\infty} F\left(\frac{b_o y_j - u(1+\rho i_o + t)}{C(b_o)}\right)\right)dG(t) = 0$$

$$\le \beta \sum_{j\in K_1} p_{ij}\left(\int_0^{+\infty} e^{R_o\left[C(b_o)y_j - u(1+\rho i_o + t)\right]}.E^{\pi}\left(e^{-R_o C(b_o) Z_1}\right)\right)dG(t).(15)$$

Từ (14) và (15) ta thu được

$$\psi_1^{\pi}(u, y_i, i_o) \le \beta E^{\pi}\left[e^{-R_o u(1+I_1)} \middle| I_o = i_o\right]$$

Sử dụng bổ đề 1, định lý 1 và bằng chứng minh quy nạp chúng ta thu được:

$$\psi_n^{\pi}(u, y_i, i_o) \le \beta E^{\pi}\left[e^{-R_o u(1+I_1)} \middle| I_o = i_o\right].(16)$$

Cho n dần đến vô cùng trong (16) ta thu được bất đẳng thức (11).

**Trường hợp 2.**

Nếu

$$\inf_{t>0} \frac{e^{R_o C(b_o)t}\int_0^t e^{-R_o C(b_o)z} dF(z)}{F(t)} = +\infty \Leftrightarrow \beta = 0.$$

Với bất kỳ $\varepsilon > 0$: $\frac{e^{R_o C(b_o)t}\int_0^t e^{-R_o C(b_o)z} dF(z)}{F(t)} \ge \varepsilon$

và

$$F(v) \le \frac{1}{\varepsilon} e^{R_o C(b_o)v}\int_0^v e^{-R_o C(b_o)z} dF(z).$$

Chứng minh tương tự như mục a), ta có

$$\psi_n^{\pi}(u, y_i, i_o) \le \frac{1}{\varepsilon} E^{\pi}\left[e^{-R_o u(1+I_1)} \middle| I_o = i_o\right].(17)$$

Cho n dần đến vô cùng trong (17), ta có

$$\psi^{\pi}(u, y_i, i_o) \le \frac{1}{\varepsilon} E^{\pi}\left[e^{-R_o u(1+I_1)} \middle| I_o = i_o\right].(18)$$

Với $\varepsilon = n\,(n \in N^*)$, công thức (18) trở thành

$$\psi^{\pi}(u, y_i, i_o) \le \frac{1}{n} E^{\pi}\left[e^{-R_o u(1+I_1)} \middle| I_o = i_o\right].(19)$$

Cho n dần đến vô cùng trong (19) ta thu được

$$\psi^{\pi}(u, y_i, i_o) \le 0 = \beta E^{\pi}\left[e^{-R_o u(1+I_1)} \middle| I_o = i_o\right].$$

Do vậy, bất đẳng thức (11) đúng khi $\beta = 0$.□

## 4. Kết luận

Bài báo này sử dụng phương pháp đệ quy xét mô hình được đưa ra bởi Maikol A. Diasparra và Rosaria Romera [9]. Chúng tôi đã mở rộng được kết quả của Maikol A. Diasparra và Rosaria Romera [9] để đưa ra các ước lượng xác suất thiệt hại cho mô hình bảo hiểm tổng quát có tác động của lãi suất có điều khiển được với dãy tiền chi trả bảo hiểm là phụ thuộc Markov và dãy tiền lãi suất là phụ thuộc hồi quy cấp 1, các dãy này nhận các giá trị trong tập số dương.

***Ghi chú:*** Bài viết này là một kết quả của nhóm nghiên cứu *"Mô hình Toán ứng dụng trong một số vấn đề kinh tế -xã hội"* thuộc trường Đại học Ngoại thương do TS Phùng Duy Quang làm Trưởng nhóm nghiên cứu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. B. Sundt and J. L. Teugels, "Ruin estimates under interest force", *Insurance: Mathematics and Economics*, **16** (1995)**,** pp. 7-22, 1995.

[2]. B. Sundt and J. L. Teugels, "The adjustment function in ruin estimates under interest force". *Insurance: Mathematics and Economics*, **19** (1997), pp. 85-94, 1997.

[3]. H. U. Gerber, *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Monograph Series, Vol.8.S.S. Heubner Foundation, Philadelphia, 1979.

[4]. H. Yang, "Non – exponetial bounds for ruin probability with interest effect included", *Scandinavian Actuarial Journal*, 2(1999), pp. 66-79, 1999.

[5]. J. Cai, “Discrete time risk models under rates of interest”. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **16** (2002)**,** pp. 309-324, 2002.
[6]. J. Cai, “Ruin probabilities with dependent rates of interest”, *Journal of Applied Probability*, **39** (2002), pp. 312-323, 2002.
[7]. J. Cai and D. C. M. Dickson, “Ruin Probabilities with a Markov chain interest model”. *Insurance: Mathematics and Economics*, **35** (2004), pp. 513-525, 2004.
[8]. J. Grandell, *Aspects of Risk Theory*, Springer, Berlin, 1991.
[9]. L. Xu and R. Wang, “Upper bounds for ruin probabilities in an autoregressive risk model with Markov chain interest rate”, *Journal of Industrial and Management optimization*, Vol.2 $N_o$.**2** (2006),165- 175, 2006.
[9]. Maikol A. Diasparra and Rosaria Romera, *Inequalities for the ruin probability in a controlled discrete-time risk process*, Woking paper, Statistics and Econometrics Series, 2009.
[10]. O. Hernández-Lerma, J. B. Lasserre, *Discrete- Time Markov Control Processes: Basic Optimality Crieria*, Springer- Verlag, New York, 1996.
[11]. O. Hernández-Lerma, J. B. Lasserre, Further *Topics on Discrete- Time Markov Control Processes*, Springer- Verlag, New York, 1999.
[12]. O. Hernández-Lerma, J. B. Lasserre, *Markov Chains and Invariant Probabilities*. Birkhauser, Basel, 2003.
[13]. S. D. Promislow, “The probability of ruin in a process with dependent increments". *Insurance: Mathematics and Economics*, **10** (1991), pp. 99-107, 1991.
[14]. P. D Quang, “Ruin Probability in a Generalized Risk Process under Rates of Interest with Homogenous Marrkov Chain premiums”, *Int.J.Stat. Probab.*, **2** (2013), pp. 85-92, 2013.
[15]. P. D. Quang, “Upper bounds for Ruin Probability in a Generalized Risk Process under Rates of Interest with Homogenous Markov Chain claims”, *Asian J. Math. Stats.*, **7** (2014), pp. 1-11 2014.
[16]. P. D. Quang, “Upper bounds for Ruin Probability in a Generalized Risk Process under Rates of Interest with Homogenous Markov Chain claims and Homogenous Markov Chain premiums”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol.8, No.29, pp. 1445-1454 (Scopus), 2014**.**
[17]. P. D. Quang, “Martingale Method for Ruin Probability in a Generalized Risk Process under Rates of Interest with Homogenous Markov Chain Premiums and Homogenous Markov Chain Interests”, *Journal of tatistics Applications & Probability Letters*, Vol.2, No.1, pp. 15-22, 2015.
[18]. P. D. Quang, “Ruin Probability in a Generalised Risk Process under Rates of Interest with Homogenous Markov Chains”, *East Asian Journal on Applied Mathematics*, Vol.4, No.3, pp. 283-300 (SCIE), 2014.
[19] P. D. Quang, “Phương pháp Martingale ước lượng xác suất thiệt hại trong mô hình bảo hiểm tổng quát có điều khiển được với dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc Markov”, *Tạp chí KH & CN- Đại học Thái Nguyên*, Tập 178 (Số 2), tr. 139-144, 2017.